10-ЛЕКЦИЯ. Біртекті сызықты жүйелер

Лекция мақсаты: Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттерімен таныстыру. Біртекті жүйенің шешімдерінің қасиеттерімен таныстыру.
Негізгі сөздер: вектор, матрица, фундаменталь матрица, Лиувилль формуласы, Коши функциясы.
Қысқаша мазмұны
Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттері

1.1. Қарапайым теңдеулер жүйелердің ең маңызды дербес түрі – сызықты жүйелер болып есептелінеді. Оның скалярлық түрдегі жазылуы төмендегідей болады:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dx_n}{dt} = p_{n1}(t)x_1 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Мұндағы, $p_{ij}(t)$ және $f_i(t)$ функциялары кейбір $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған нақты үздіксіз функциялар деп қарастырылады. Бұл жүйені былайша жазуға да болады:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)x_j + f_i(t), (i = 1,\ldots,n) \tag{2}$$

Егер $P(t) = \left(p_{ij}(t)\right), (i = 1,\ldots,n)$ матрицасын енгізсек, ал x пен f-ты вектор немесе бір бағаналы матрицалар деп қарастырсақ, онда берілген жүйені төмендегідей векторлы-матрицалық түрде жазуға болады:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) \tag{3}$$

Бұл қатынасты жүйе деумен қатар (оның векторлық мағынасын ескеріп), бір теңдеу деп те айтуға болады.

Әдетте, $f(t)$ – вектор-функцияны бос мүше деп атайды. Егер осы бос мүше нөлге тең болса, онда (3) жүйенің орнына оның біртектісін аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \tag{4}$$

Бос мүше нөлге тең болмағанда (3) жүйені (4) жүйенің сәйкес біртексізі деп атайды.

Бұл жүйелер үшін Коши есебі мына түрде қойылады: барлық векторлардың ішінен

$$\varphi(t_0) = x^0, t_0 \in \langle a,b\rangle$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімді табу керек. Мұндағы, x^0 - берілген бастапқы вектор.

1.2. Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттерін келтірейік:

1^0. Тәуелсіз айнымалыны үздіксіз дифференциалданатын функция арқылы басқа бір тәуелсіз айнымалымен алмастырғаннан жүйенің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, $t = \varphi(\tau), \varphi'(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \langle c,d\rangle$ алмастыруын жасайық. Туындыны жаңа айнымалы арқылы өрнектейік:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{1}{\varphi'(\tau)}$$

Осыдан,

$$\frac{1}{\varphi'(\tau)}\cdot\frac{dx}{d\tau} = P[\varphi(\tau)]x + f[\varphi(\tau)]$$

немесе

$$\frac{dx}{d\tau} = P[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)x + f[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)$$

яғни,

$$\frac{dx}{d\tau} = \overline{P}(\tau)x + \overline{f}(\tau) \tag{5}$$

түріндегі жаңа сызықты жүйеге қайта келдік.

2^0. Белгісіз функцияны сызықты түрлендіргеннен жүйенің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, айталық $x = \alpha(t)y + \beta(t)$ түрінде алмастыру жасалсын. Мұнда $\alpha(t)=(\alpha_{ij}),(i,j=1,...,n)$ ерекше емес матрица, яғни оның анықтауышы нөлге тең емес. Осы қатынастан туынды алып берілген жүйенің өзін пайдалансақ, мынандай қатынастар аламыз:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha\frac{dy}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}y+\frac{d\beta}{dt}$$

яғни,

$$P(t)[\alpha y+\beta]+f=\alpha\frac{dy}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}y+\frac{d\beta}{dt}$$

Осыдан,

$$\frac{dy}{dt}=\alpha^{-1}\left[P(t)\alpha-\frac{d\alpha}{dt}\right]y+\alpha^{-1}\left[P(t)\beta+f(t)-\frac{d\beta}{dt}\right]$$

немесе

$$\frac{dy}{dt}=\overline{P}(t)y+\overline{f}(t)$$

Мұндағы,

$$\overline{P}(t)=\alpha^{-1}\left[P(t)\alpha-\frac{d\alpha}{dt}\right],$$

$$\overline{f}(t)=\alpha^{-1}\left[P(t)\beta+f(t)-\frac{d\beta}{dt}\right]$$

Біртекті сызықты жүйелер

2.1. Төмендегідей біртекті сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x \tag{1}$$

Осы жүйенің шешімдерінің кейбір қасиеттерін келтірейік. Ең алдымен ескеретін жәй – біртекті жүйенің бастапқы Коши есебінің $x(t_0)=0$ шартын қанағаттандыратын нөлдік $x(t)=0$ шешімі барлық уақытта бар және ол шешім жалғыз.

Теорема-1. Егер $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ – вектор-функциялары (1) жүйенің шешімдері болса, олардың кез келген сызықты комбинациясы да сол жүйенің шешімі болады.

Дәлелдеуі. Берілген функциялардың нақты сандар өрісіндегі сызықты комбинациясын алайық:

$$\varphi(t)=\alpha_1\varphi^1(t)+...+\alpha_n\varphi^n(t) \tag{2}$$

Мұндағы, әрбір $\varphi^i(t)$ функциясы үшін

$$\frac{d\varphi^i(t)}{dt}=P(t)\varphi^i(t),\forall t\in\langle a,b\rangle$$

тепе-теңдігі орындалады.

Осыдан,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\alpha_1\frac{d\varphi^1(t)}{dt}+...+\alpha_n\frac{d\varphi^n(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(t)\varphi^i(t)=$$

$$=P(t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi^i(t)=P(t)\varphi(t),\forall t\in\langle a,b\rangle$$

Теорема-2. Егер (1) жүйенің комплексты $\varphi(t)=u(t)+iv(t)$ шешімі бар болса, онда оның нақты және жорамал бөліктері өз алдарына (1) жүйенің шешімін береді.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{du(t)}{dt}+i\frac{dv(t)}{dt}=P(t)\big(u(t)+iv(t)\big)=P(t)u(t)+iP(t)v(t)$$

Осыдан,

$$\frac{du(t)}{dt} = P(t)u(t), \frac{dv(t)}{dt} = P(t)v(t), \forall t \in \langle a,b \rangle \tag{3}$$

Анықтама-1. Егер $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ функциялары үшін бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандары табылып,

$$\alpha_1\varphi^1(t) + ... + \alpha_n\varphi^n(t) = 0, \forall t \in \langle a,b \rangle \tag{4}$$

теңдігі орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a,b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді деп аталынады, ал (4) теңдік $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандарының тек нөлдік мәндерінде ғана орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a,b \rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз деп аталады.

Ескерту. Егер берілген функциялар жиыны $\langle a,b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда сол аралыққа жататын кез келген $t_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктесінде де тәуелді болады. Кері ұйғарым орындалмайды, өйткені бұл жағдайда $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандары t_0-ға тәуелді болады. Ал егер берілген функциялар жиыны белгілі бір дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдері болса, онда бір нүктедегі тәуелділік пен тәуелсіздік сәйкес аралықтағы тәуелділік пен тәуелсіздікке эквивалент.

Анықтама-2. Біртекті сызықты жүйенің $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған n сызықты тәуелсіз шешімдер жиынын сол жүйенің осы аралықтағы базисі немесе фундаменталь шешімдер жүйесі деп атайды.

2.2. Айталық, $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ вектор-функциялары (1) жүйенің шешімдері болсын. Әрбір бағанасы осы векторлардың координаттарынан тұратын төмендегідей матрица құрайық:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & ... & \varphi_{1n}(t) \\ \multicolumn{3}{c}{.......................} \\ \varphi_{n1}(t) & ... & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Осы матрицаның анықтауышын Вронский анықтауышы немесе вронскиан деп атайды және оны $W(t)$ - деп белгілейді. Сонымен,

$$W(t) = W\left[\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)\right] = det\Phi(t) \tag{6}$$

Егер (5) матрицаның анықтауышы нөлге тең болмаса, онда ол матрица фундаменталь матрица деп аталынады.

Теорема-3. Егер $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ функциялары $\langle a,b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда осы аралықта олардың вронскианы нөлге тең болады.

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша

$$\alpha_1\varphi^1(t) + ... + \alpha_n\varphi^n(t) = 0 \tag{7}$$

мұнда $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандарының бәрі бірдей нөл емес. Соңғы қатынасты координаттар бойынша ашып жазсақ, төмендегідей біртекті сызықты жүйе аламыз:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1\varphi_{11}(t) + \ ... + \alpha_n\varphi_{1n}(t) = 0 \\ .... \\ \alpha_1\varphi_{n1}(t) + \ ... + \alpha_n\varphi_{nn}(t) = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Бұл жүйенің нөлдік емес шешімі бар болу үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы шарт, яғни $W(t) = 0, \forall t \in \langle a,b \rangle$.

Теорема-4. Егер $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ функциялары (1) жүйенің $\langle a,b \rangle$ аралығындағы сызықты тәуелсіз шешімдері болса, онда осы аралықтың кез келген нүктесінде вронскиан нөлге тең болмайды.

Дәлелдеуі. Кері жориық. Айталық, кейбір $t_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктеде $W(t_0) = 0$ болсын. Белгісіз $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандары арқылы төмендегідей теңдік құрайық:

$$\alpha_1\varphi^1(t_0) + \ ... + \alpha_n\varphi^n(t_0) = 0 \tag{9}$$

немесе координаттары бойынша:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1\varphi_{11}(t_0)+\ ...+\alpha_n\varphi_{1n}(t_0)=0\\&...................................\\&\alpha_1\varphi_{n1}(t_0)+\ ...+\alpha_n\varphi_{nn}(t_0)=0\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Бұл жүйенің анықтауышы нөлге тең, өйткені ол анықтауыш $W(t_0)$. Сондықтан, оның нөлдік емес шешімі бар: $\alpha_1^{\,0},...,\alpha_n^{\,0}$.

Берілген шешімдердің сызықты комбинациясын қарастырайық:

$$x(t)=\alpha_1^{\,0}\varphi^1(t)+\ ...+\alpha_n^{\,0}\varphi^n(t)\qquad(11)$$

Бұл вектор-функция берілген жүйенің шешімі болады (теорема-1).
Осындағы $\alpha_1^{\,0},...,\alpha_n^{\,0}$ сандары (9) теңдікті қанағаттандырғандықтан, $x(t_0)=0$ теңдігі орындалады, яғни (11) шешімнің бастапқы мәні нөлге тең. Шешімнің жалғыздық шарты бойынша $x(t)$ нөлдік шешім. Сондықтан,

$$x(t)=\alpha_1^{\,0}\varphi^1(t)+\ ...+\alpha_n^{\,0}\varphi^n(t)=0,\forall t\in\langle a,b\rangle\qquad(12)$$

Соңғы тепе-теңдік $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ векторларының сызықты тәуелділігін көрсетеді. Бұл - теореманың шартына қайшы.

Соңғы екі теореманы біріктіріп айтсақ, мынандай қорытындыға келеміз: (1) жүйенің n шешімі $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз болу үшін олардың вронскианының $\langle a,b\rangle$ аралығының бірде-бір нүктесінде нөлге тең болмауы қажетті және жеткілікті.

Теорема-5. Егер $P(t)$ матрицасы $\langle a,b\rangle$ аралығында үздіксіз болса, онда (1) жүйенің базисы әрқашанда бар болады және егер $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ жүйенің базисы болса, онда оның жалпы шешімі мына түрде жазылады:

$$x(t)=C_1\varphi^1(t)+\ ...+C_n\varphi^n(t)\qquad(13)$$

мұндағы, $C_1,...,C_n$ - кез келген тұрақты сандар.

Дәлелдеуі. Кез келген сызықты тәуелсіз n векторлар: $a^1,...,a^n$ үшін кейбір $t_0\in\langle a,b\rangle$ нүктесінде

$$\varphi^1(t_0)=a^1,...,\varphi^n(t_0)=a^n\qquad(14)$$

шартын қанағаттандыратын шешімдер жиынын алсақ, жеткілікті. Бастапқы $\varphi^1(t_0),...,\varphi^n(t_0)$ мәндері сызықты тәуелсіз болғандықтан, бұл шешімдер $\langle a,b\rangle$ аралығында да тәуелсіз, яғни олар (1) жүйенің базисын құрайды.

Енді (13) қатынастың жалпы шешім болатынын көрсетейік. Біріншіден, бұл қатынас шешімдердің сызықты комбинациясы болғандықтан, $C_1,...,C_n$ сандарының барлық мәндерінде жүйенің шешімі болады (теорема-1). Екіншіден, одан кез келген Коши есебінің шешімін алуға болады. Ол үшін

$$x(t_0)=x^0\qquad(15)$$

шартын қоялық, яғни

$$C_1\varphi^1(t_0)+\ ...+C_n\varphi^n(t_0)=x^0\qquad(16)$$

Бұл векторлық теңдікті координаттары бойынша ашып жазсақ,

$$\left.\begin{aligned}&C_1\varphi_{11}(t_0)+\ ...+C_n\varphi_{1n}(t_0)=x_{10}\\&...................................\\&C_1\varphi_{n1}(t_0)+\ ...+C_n\varphi_{nn}(t_0)=x_{n0}\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

жүйесін аламыз. Оның анықтауышы нөлге тең емес. Сондықтан, (17) жүйенің тек жалғыз ғана шешімі бар: $C_1^{\,0},...,C_n^{\,0}$. Осы тұрақтыларды (13) қатынасқа қойсақ, (15) шартты қанағаттандыратын дербес шешім аламыз.

2.3. Жалпы шешімді фундаменталь матрица арқылы жазуға болады. Айталық, $\Phi(t)$ берілген (1) жүйенің фундаменталь матрицасы болсын. Оның әрбір бағанасы тәуелсіз векторлардың координаттары болғандықтан, бұл матрица матрицалық

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X \tag{18}$$

теңдеудің шешімі болады, яғни

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = P(t)\Phi(t), \forall t \in \langle a,b \rangle \tag{19}$$

Осы матрицаны пайдалансақ, жалпы шешім

$$x(t) = \Phi(t)C \tag{20}$$

түрінде жазылады. Мұнда C - кез келген тұрақты вектор. Бұл қатынастан Коши есебінің шешімін анықтауға болады: (15) бастапқы шартты пайдалансақ,

$$x^0 = \Phi(t_0)C$$

теңдігін аламыз. Осыдан $C^0 = \Phi^{-1}(t_0)x^0$. Сонда

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x^0 \tag{21}$$

түріндегі дербес шешім аламыз. Егер $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = K(t,t_0)$ белгілеуін енгізсек, соңғы теңдік былай жазылады:

$$x(t) = K(t,t_0)x^0 \tag{22}$$

Осындағы $K(t,t_0)$ матрицасын Коши матрицасы деп атайды.

Егер соңғы қатынастағы t_0-ді тұрақталған сан, ал x^0-ді тұрақталмаған вектор деп есептесек, онда (22) қатынасты жүйенің Коши түріндегі жалпы шешімі деп атайды.

Егер кейбір $t_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктесінде $\Phi(t_0) = E$ теңдігі орындалса, онда $\Phi(t)$ матрицасы t_0 нүктесінде қалыпталған (нормаланған) деп аталады. Бұл жағдайда шешім

$$x(t) = \Phi(t)x^0 \tag{23}$$

түрінде жазылады.

Теорема-6. Егер $\Phi(t)$ фундаменталь матрица болса, онда $\Psi(t) = \Phi(t)C$ матрицасы да фундаменталь матрица болады. Мұнда C - тұрақты $(n \times n)$ - өлшемді ерекше емес матрица.

Шынында да,

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d(\Phi C)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}C$$

Ал $\Phi(t)$ матрицасы (18) матрицалық теңдеуді қанағаттандыратындықтан,

$$\frac{d(\Phi C)}{dt} = (P\Phi)C = P(\Phi C)$$

тепе-теңдігін аламыз, яғни $\Psi(t) = \Phi(t)C$ матрицасы да (18) матрицалық теңдеуді қанағаттандырады. Оның үстіне

$$det\Psi(t) = det\Phi(t) \cdot detC \neq 0$$

2.4. Лиувилль формуласын келтірейік.

Алдымен, n-ші ретті анықтауыштың туындысы қалай ашылатынын көрсетейік.

n-ші ретті анықтауыштың туындысы сол анықтауыштың әр бағанасы (немесе әр жатық жолы) кезекпен туындыларымен ауыстырылған n анықтауыштардың қосындысынан тұрады. Осы ереже бойынша вронскианның туындысын ашайық:

$$\dot{W}(t)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11}\cdots\dot{\varphi}_{1i}\cdots\varphi_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_{j1}\cdots\dot{\varphi}_{ji}\cdots\varphi_{jn}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_{n1}\cdots\dot{\varphi}_{ni}\cdots\varphi_{nn}\end{vmatrix} \qquad (24)$$

Мұндағы, φ_{ji} берілген жүйенің шешімі болғандықтан,

$$\dot{\varphi}_{ji}(t)=\sum_{k=1}^{n}p_{jk}(t)\varphi_{ki}(t),(i,j=1,...,n)$$

Осы өрнектерді анықтауыштың i-нші бағанасына қойсақ, анықтауыштың қасиеттері бойынша, $k=j$ болатын қосындыдан басқа анықтауыштардың бәрі нөлге тең болады, өйткені олардың екі бағанасы өзара пропорционал болады. Сондықтан,

$$\dot{W}(t)=\sum_{j=1}^{n}p_{jj}(t)W(t)$$

Осыдан

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}trP(t)dt} \qquad (25)$$

Мұндағы, $trP(t)=\sum_{j=1}^{n}p_{jj}(t)$ - берілген $P(t)$ матрицасының ізі деп аталады.

Осы (25) теңдікті Лиувилль формуласы деп атайды. Бұл формуладан мынандай қорытынды шығады: егер $\langle a,b\rangle$ аралығының бір нүктесінде вронскиан нөлге тең болса, ол бүкіл аралықта нөлге тең болады, ал $\langle a,b\rangle$ аралығының бір нүктесінде нөлге тең болмаса, онда ол бүкіл аралықта нөлге тең болмайды.

2.5. Айталық, $\Phi(t)$ - фундаменталь матрица болсын.
$\Phi^{-1}(t)\Phi(t)=E$ тепе-теңдігін дифференциалдайық:

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Phi)=\frac{d\Phi^{-1}}{dt}\Phi+\Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt}=0$$

Осыдан

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt}=-\Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt}\Phi^{-1}=-\Phi^{-1}P\Phi\Phi^{-1}=-\Phi^{-1}P$$

немесе

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt}=-\Phi^{-1}P$$

Соңғы қатынастағы матрицаларды аударсақ,

$$\frac{d(\Phi^{-1})^T}{dt}=-P^T(\Phi^{-1})^T$$

теңдігін аламыз. Бұдан шығатын қорытынды, $\Psi(t)=(\Phi^{-1})^T$ матрицасы

$$\frac{dy}{dt}=-P(t)y \qquad (27)$$

теңдеуінің фундаменталь матрицасы болатынын көреміз. Осы (27) жүйені берілген (1) жүйенің түйіндесі деп атайды. Егер $\Psi_1(t)$ осы жүйенің кейбір фундаменталь матрицасы болса, онда

$$\Psi_1(t)=(\Phi^{-1})^T C$$

қатынасы орын алады. Мұнда C -ерекше емес матрица. Осыдан

$$\Psi_1^T(t) = C^T \Phi^{-1}$$

немесе

$$\Psi_1^T(t)\Phi(t) = C^T = B$$

Соңғы теңдіктен мынаны көреміз: $\Psi_1^T(t)$- матрицасының жатық жолы (27) жүйенің шешімдері болатынын, $\Phi(t)$ матрицасының бағаналары (1) жүйенің шешімдері болатыны, ал олардың көбейтіндісі тұрақты екенін көреміз.